Αριθμητική Ανάλυση

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|$ , $0<L<1$

Αν $\varphi \in C^2[a,b]$

$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi'(\xi)|x-y|$ , $\xi \in (\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$

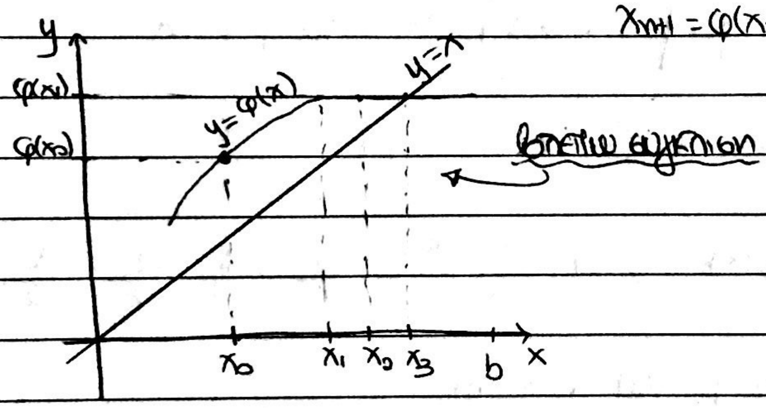
$$L = \max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)|$$

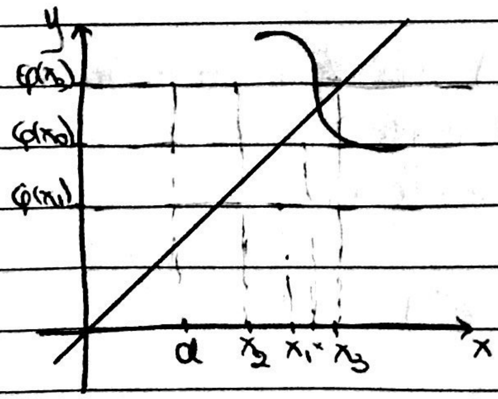
$\varphi \in C^2(a,b)$ τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκη η συνθ. Lipschitz

Έστω $\varphi(x) = \sqrt{x}$ , τότε $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , παρατ. ότι $\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = \infty$ .

Γεωμετρική Ερμηνεία

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , $n=0,1,\dots$ , $x_0 \in I = [a,b]$



Άσκηση 2.8: Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι:
η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ $x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}$, $n = 0,1,2,\dots$

συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $[0,1]$

$\varphi(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \varphi \uparrow$

$\varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(1)$, $x \in [0,1]$
$0 < \frac{1}{2} \le \varphi(x) \le \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$

$\varphi([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right] \subset [0,1] \Rightarrow$ καλά ορισμένη

$\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$, $\varphi''(x) = \frac{1}{8} e^{\frac{x}{2}} > 0$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \varphi' \uparrow$

$\max_{0 \le x \le 1} |\varphi'(x)| = \max_{0 \le x \le 1} \varphi'(x) = \varphi'(1) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{e}}{2} < \frac{1}{2}$

$L = \frac{\sqrt{e}}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow$ η $\varphi$ είναι συστολή

Άσκηση 2.9 (Α-Δ): Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$
συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $[0,1]$.

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ : $\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^{x})$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{x}) \le 0$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \varphi \downarrow$

$\varphi(1) \le \varphi(x) \le \varphi(0) \iff 0 \le \frac{1}{3}(3 - e) \le \varphi(x) \le \frac{1}{3} < 1$, $x \in [0,1]$

$\varphi[0,1] = [\frac{1}{3}(3-e), \frac{1}{3}] \subset [0,1] \Rightarrow \varphi$ καλώς ορισμένη

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1-e^{x}) \leq 0$ , $\varphi''(x) = \frac{1}{3}e^{x} < 0$, $x \in [0,1]$

$\varphi' \downarrow \Rightarrow \max\limits_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = |\varphi'(1)| = |\frac{1}{3}(1-e)| = \frac{e-1}{3} = \alpha < 1$

$\Rightarrow$ η $\varphi$ είναι συστολή.

Άσκηση 2.10 : Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$x_{n+1} = \frac{1}{6}(3+4x_n^2 - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$

συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $x^* \in [0,1]$.

Αποδείξτε ότι: $|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \frac{8-e}{6}$.

$\varphi(x) = \frac{1}{6}(3+4x^2 - e^{x})$ , $\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^{x})$

Παρατηρούμε ότι: $0 < \frac{1-e}{6} = \frac{1}{6}(3+4\cdot 0 - e^{1}) \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{6}(3+4\cdot 1^2 - \underbrace{e^0}_{1})$

$\varphi([0,1]) \in [\frac{1-e}{6}, 1] \in [0,1] \Rightarrow$ καλώς ορισμένη

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^{x})$

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8 - e^{x}) > 0 \Rightarrow \varphi \uparrow$

$\varphi'(0) < 0$, $\varphi'(1) > 0$ , $\max\limits_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \max\{|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)|\} =$

$= \max\{\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6}\} = \frac{8-e}{6} = \alpha < 1$

$|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$

Άσκηση 2.4: Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}\left|x_n^3 - \frac{1}{8}\right|$, $n\in\mathbb{N}_0$

συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x - \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right|$ που βρίσκεται στο $[0,1]$.

Η $\varphi \notin C^2[0,1]$ δεν ορίζεται στο $x = \frac{1}{2}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} - x^3\right), & x\in[0,1/2] \\ \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{1}{8}\right), & x\in[1/2,1] \end{cases}$$

Η φ είναι φθίνουσα στο $[0,1/2]$ και αύξουσα στο $[1/2,1]$ και μη αρνητική στο $[0,1]$. Επομένως:

$$\varphi(x) \in [0, \max(\{\varphi(0), \varphi(1)\})] = [0, \max\{1/32, 7/32\}] = [0, 7/32] \Rightarrow$$

φ: φθίνουσα και καλώς ορισμένη

Έστω $x, y \in [0,1]$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| - \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| \right| \leq$$

$|w+z| \leq |w| + |z|$

$||w| - |z|| \leq |w - z|$

$$\leq \left| \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\left(y^3 - \frac{1}{8}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{4}|x^3 - y^3| = \frac{1}{4}|x^2 + xy + y^2||x - y| \leq \frac{3}{4}|x - y| \Rightarrow$$

η φ είναι συστολή.